

ZESTAW ZADAŃ

ZMIENNA LOSOWA CIĄGŁA

1. Sprawdź czy podana funkcja $f(x)$ jest funkcją gęstości zmiennej losowej X :

$$a) f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

2. Dla jakiej wartości a , A lub C dla podana funkcja $f(x)$ jest funkcją gęstości zmiennej losowej X :

$$a) f(x) = \begin{cases} a(1-x) & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x) & \text{dla } 0 < x < C \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 4x^2 & \text{dla } 0 \leq x \leq C \\ 0 & \text{dla } x > C \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ A-x & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq -1 \\ a(x+1) & \text{dla } -1 < x \leq 0 \\ -\frac{1}{6}(x-3) & \text{dla } 0 < x \leq 3 \\ 0 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$$

$$3. \text{ Zmienna losowa } X \text{ ma rozkład o gęstości: } f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ 2-x & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{dla } 0 \text{ poza tym} \end{cases}$$

- a. Wyznaczyć dystrybuantę;
- b. Obliczyć wartość oczekiwaną;
- c. Obliczyć wariancję;
- d. Obliczyć odchylenie standardowe.

$$4. \text{ Zmienna losowa } X \text{ ma rozkład o gęstości: } f(x) = \begin{cases} 0,75(1-x^2) & \text{dla } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{dla } x < -1 \text{ oraz } x > 1 \end{cases}$$

- a. Wyznaczyć dystrybuantę;
- b. Obliczyć wartość oczekiwaną;
- c. Obliczyć wariancję;
- d. Obliczyć odchylenie standardowe;
- e. Wyznaczyć współczynnik asymetrii;
- f. Wyznaczyć współczynnik zmienności.

5. Wyznaczyć funkcję gęstości dla następującej dystrybuanty:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 2 \\ \frac{1}{36}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{9} & \text{dla } 2 < x \leq 8 \\ 1 & \text{dla } x > 8 \end{cases}$$

6. Dana jest dystrybuanta zmiennej losowej X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & \text{dla } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

wyznaczyć prawdopodobieństwa: $P(X < 0,5)$, $P(X \leq 1,5)$, $P(X > 0,5)$, $P(0,25 \leq X < 1,5)$, $P(|x| \leq 2)$, $P(|X| > 0,5)$, $P(X < 0,45)$.

7. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{72}x^2 & \text{dla } 0 < x \leq 6 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Wyznaczyć prawdopodobieństwa:

$P(X < 3)$, $P(X < 7)$, $P(X > 0,5)$, $P(0,25 \leq X < 1,5)$, $P(x = 3)$.

8. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} 4(x-1)^3 & \text{dla } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Obliczyć wartość przeciętną i wariancję zmiennej losowej $Y = 3X - 2$.

9. Dana jest dystrybuanta zmiennej losowej X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ x^3 & \text{dla } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

- Obliczyć wartość oczekiwaną;
- Obliczyć wariancję;
- Obliczyć odchylenie standardowe;
- Wyznaczyć współczynnik asymetrii;
- Wyznaczyć współczynnik zmienności;
- Wyznaczyć prawdopodobieństwa: $P(X > 1,2)$, $P(|x| \leq 2)$, $P(|X| > 0,5)$;
- Obliczyć wartość przeciętną i wariancję zmiennej losowej $Y = 3X - 2$.

Literatura do zajęć

- Maria Balcerowicz-Szkutnik, Elżbieta Sojka, Włodzimierz Szkutnik, (2016), *Wnioskowanie statystyczne w przykładach i zadaniach*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach.
- S. Ostasiewicz, Z. Rusnak, U. Siedlecka (2011), *Statystyka - elementy teorii i zadania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu.
- Mieczysław Sobczyk, *Statystyka*, (2019), Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Bartos, J., Dyczka, W., Królikowska, K., Krysicki, W., & Wasilewski, M. (1999). *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa.
- Gmurman, V. E. (1975). *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
- Niemirow, W. (1999). *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*. Szkoła Nauk Ścisłych.
- Greń, J. (1982). *Statystyka matematyczna: modele i zadania*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Zad. Domowe

1. Zmienna losowa X ma dystrybuantę: $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{2} & 1 < x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$. Obliczyć wartość przeciętną i wariancję

zmiennej losowej $Y = 4X - 2$.

2. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{dla } 0 < x \leq 1 \\ -0,5x^2 + 2x - 1 & \text{dla } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

Obliczyć:

a) $P(-0,5 < x < 0,5)$,

c) $P(1,5 < x < 2,5)$,

e) $P(-0,5 < x < 1,5)$

b) $P(-0,5 < x \leq 0,25)$,

d) $P(2 < x < 2,5)$,

i zaznaczyć wartość obliczonego prawdopodobieństwa na wykresie dystrybuanty.