ZESTAW ZADAŃ
WYBRANE ROZKŁADY ZMIENNEJ LOSOWEJ DYSKRETNEJ

1. W supermarkecie w ostatnich dniach zorganizowano posezonową wyprzedaż odzieży. Wszystkie przecenione towary umieszczono w specjalnych pojemnikach. Klienta zainteresowanego zakupem T-shirtu w rozmiarze XL skierowano do pojemnika z koszulkami o rozmiarach L i XL. Przy czym koszulek o rozmiarze XL było w koszu 35%. Traktując wybór koszulki jako zmienną losową zbudować jej rozkład dwupunktowy, następnie
   a) Wyznaczyć dystrybuantę,
   b) Wyznaczyć wartość oczekiwaną,
   c) Wyznaczyć wariancję,
   d) Wyznaczyć współczynnik zmienności.

   Wskazówka: rozkład dwupunktowy.

$$E(X) = p; \quad D^2(X) = pq$$

$$F(X)=\begin{cases} 0 & dla \quad x < 0 \\ q & dla \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & dla \quad x > 1 \end{cases}$$

Rozkład dwupunktowy, jest to rozkład w którym zmienna losowa przyjmuje dwie wartości: 0 i 1.

Przyjmuje się, że: $P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = q = 1 - p$

2. Urna zawiera 9 kul w tym 1 czarna. Wybieramy jednocześnie z urny 4 kule. Wybranie kuli czarnej w losowanej czwórce oznaczamy mianem sukcesu. Traktując wyniki losowanej jako zmienną losowa o rozkładzie dwupunktowym, wyznaczyć:
   a) funkcję prawdopodobieństwa rozkładu tej zmiennej
   b) zapisać funkcję dystrybuanty zmiennej losowej X
   c) wyznaczyć $E(X)$, $D^2(X)$.

   Wskazówka: rozkład dwupunktowy.

3. Rzucono trzy razy symetryczną monetą. Niech zdarzenie X oznacza liczbę wyrzuconych orłów:
   a) Zbudować rozkład zmiennej losowej X;
   b) Zapisać funkcję dystrybuanty zmiennej losowej X;
   c) Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania orła w dwóch rzutach;
   d) Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz orła;
   e) Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania co najwyżej raz orła;
   f) Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania samych reszek.

   Wskazówka: rozkład dwumianowy.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad k = 0,1,2, \dots , n$$

$$E(X) = np, \qquad D^2(X) = npq$$

Rozkład dwumianowy określa prawdopodobieństwo k-krotnego zajścia określonego zdarzenia losowego, jeśli prawdopodobieństwo wystąpienia tego zdarzenia jest równe p.

4. W hali produkcyjnej pracują cztery obrabiarki. Prawdopodobieństwo zepsucia się każdej z tych maszyn jest równe 0,2. Awarie maszyn występują niezależnie od siebie. Oblicz prawdopodobieństwo awarii:
   a) jednej maszyny,
   b) wszystkich czterech maszyn,
   c) co najwyżej trzech maszyn.
   d) Wyznaczyć $E(X)$, $D^2(X)$

   Wskazówka: rozkład dwumianowy.

5. Zmienna losowa ma rozkład dwumianowy z wartością oczekiwaną 12 i wariancją 3. Znajdź wartości parametrów p i n.

6. Doświadczenie polega na wielokrotnym rzucie sześcienną kostką. Ile należy wykonać rzutów, aby prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej raz szóstki było większe od $\frac{10}{49}$?

7. Ile razy należy rzucić trzema monetami, aby prawdopodobieństwo otrzymania przynajmniej raz trzech reszek było większe od $\frac{15}{64}$?

8. Zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy i znane jest prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej raz sukcesu w czterech próbach: $P(X \geq 1) = \frac{80}{81}$. Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania sukcesu w jednej próbie?

9. Zakład ubezpieczeniowy ubezpiecza na wypadek śmierci 1000 osób. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany klient umrze w ciągu roku jest równe 0,008. Liczba klientów którzy zmarli w ciągu roku jest zmienną losową. Wyznaczyć:
   a) prawdopodobieństwo, że w ciągu roku umrze 10 klientów;
   b) prawdopodobieństwo, że w ciągu roku umrze co najmniej 3 klientów;
   c) wartość oczekiwaną
   d) wariancję.

   Wskazówka: rozkład Poissona.

$$P(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; \quad \lambda = np$$
$$E(X) = np = \lambda, \quad D^2(X) = np = \lambda$$
Rozkład Poissona (graniczny rozkład dwumianowy), to rozkład zdarzeń rzadkich, czyli zachodzących z małym prawdopodobieństwem ($p \leq 0{,}02, n > 100$).

10. Wadliwość partii towaru wynosi $p = 0{,}006$. Obliczyć:
    a) prawdopodobieństwo, że losując ze zwracaniem 150 sztuk otrzymamy dokładnie 2 sztuki wadliwe.
    b) prawdopodobieństwo, że losując ze zwracaniem 300 sztuk otrzymamy co najmniej 4 sztuki wadliwe.
    c) prawdopodobieństwo, że losując ze zwracaniem 500 sztuk otrzymamy co najwyżej 2 sztuki wadliwe.

    Wskazówka: rozkład Poissona.

11. W Katowicach zaobserwowano w ciągu 10 lat średnio 2 wykolejenia pociągów rocznie. Zmienna losowa X, oznaczająca liczbę wykolejeń rocznie, może przyjmować wartości: 0, 1, 2,…. Obliczyć prawdopodobieństwo, że:
    a) Liczba wykolejeń nie przekroczy dwóch w ciągu roku,
    b) Liczba wykolejeń będzie równa dokładnie 3 w ciągu roku,
    c) Liczba wykolejeń będzie wynosiła co najmniej 1 w ciągu roku
    d) Nie będzie żadnego wykolejenia.

Wskazówka: rozkład Poissona.

12. W pewnym bloku mieszkalnym zbadano liczbę osób wchodzących w skład danego gospodarstwa domowego. Otrzymano następujące wyniki:

Liczba osób w gospodarstwie domowym	1	2	3	4	5
Liczba gospodarstw domowych	50	176	290	254	30

Zakładając, że rozkład prawdopodobieństwa liczby osób w gospodarstwie jest rozkładem Poissona, należy:
    a) Wyznaczyć funkcję rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.
    b) Zapisać funkcję dystrybuanty zmiennej losowej X.
    c) Znaleźć prawdopodobieństwo, że losowo wybrane gospodarstwo domowe składa się z 4 osób.

Wskazówka: rozkład Poissona.

13. Na lotnisku ląduje w ciągu 1 minuty przeciętnie 5 samolotów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu 5 minut wyląduje na lotnisku:
    a) dokładnie 35 samolotów,
    b) mniej niż 35 samolotów,
    c) co najmniej 35 samolotów.

Wskazówka: rozkład Poissona z jego rozszerzeniem na strumień zdarzeń.

Prawdopodobieństwo zajścia k-zdarzeń w strumieniu jednorodnym na odcinku czasu t obliczamy według wzoru:

$$P_t(X=k) \approx \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}; \quad \lambda = np$$

Literatura do zajęć

1) Maria Balcerowicz-Szkutnik, Elżbieta Sojka, Włodzimierz Szkutnik, (2016), *Wnioskowanie statystyczne w przykładach i zadaniach*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach.
2) S. Ostasiewicz, Z. Rusnak, U. Siedlecka (2011), *Statystyka - elementy teorii i zadania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu.
3) Mieczysław Sobczyk, *Statystyka*, (2019), Wydawnictawo Naukowe PWN.
4) Bartos, J., Dyczka, W., Królikowska, K., Krysicki, W., & Wasilewski, M. (1999). Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach. *Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa*.
5) Gmurman, V. E. (1975). *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
6) Niemiro, W. (1999). *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*. Szkoła Nauk Ścisłych.
7) Greń, J. (1982). *Statystyka matematyczna: modele i zadania*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Zadanie domowe

1. Rzucono cztery razy symetryczną monetą. Niech zdarzenie X oznacza liczbę wyrzuconych orłów:
    a) Zbudować rozkład zmiennej losowej X
    b) Zapisać funkcję dystrybuanty zmiennej losowej X
    c) Wyznaczyć $E(X)$, $D^2(X)$
    d) Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz reszki.

2. Rzucono symetryczną kostką do gry 8 razy. Wyznaczyć prawdopodobieństwa poniższych zdarzeń.
    a) dokładnie raz wypadła szóstka,
    b) 4 razy wypadła parzysta liczba oczek,
    c) ani razu nie wyrzucono jedynki,
    d) co najwyżej 3 razy wypadła trójka lub czwórka,
    e) przynajmniej 2 razy liczba oczek była większa niż 4.

3. Wykonano 6 rzutów kostką.
    a) Ile przeciętnie uzyskano szóstek?
    b) Wyznaczyć odchylenie standardowe zmiennej losowej jaką jest liczba uzyskanych czwórek lub piątek.

4. Pewna gra polega na jednoczesnym rzucie monetą i kostką. Wygranie następuje przy jednoczesnym wyrzuceniu orła i podzielnej przez 3 liczby oczek. Oblicz prawdopodobieństwo, że na 4 gry:
    a) Będą dokładnie dwie wygrane
    b) Nie będzie wygranej.

5. Obliczyć prawdopodobieństwo trafienia co najmniej jednej „szóstki" w Toto Lotku. Liczba kuponów $n = 10^6$. $p \approx 7{,}15 \cdot 10^{-8}$.

6. Para młoda kroi tort weselny. Liczba rodzynek w jednym kawałku ciasta ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda = 5$.
    d) Ile przeciętnie rodzynek znajduje się w jednej porcji?
    e) Jakie jest odchylenie standardowe rodzynek w porcji?