ZESTAW ZADAŃ Z ZAGADNIENIA:

ESTYMACJA PRZEDZIAŁOWA

Przedział ufności dla średniej

1. Miesięczne wydatki na żywność w rodzinach trzyosobowych zamieszkałych w mieście są przedmiotem badań od wielu lat. W ostatnim roku z populacji tych rodzin wylosowano próbę 100 – elementową.
Z populacji tej wyznaczono średnią wydatków na żywność w skali miesiąca zł. Dotychczasowe badania wykazywały stałą wariancję wydatków na żywność  w całej badanej populacji rodzin. Wyznacz przedział ufności średnich miesięcznych wydatków na żywność w rodzinach 3-osobowych, dla całej populacji przyjmując poziom ufności równy 0,95. Określ względny błąd precyzji szacunku nieznanego parametru m. (wskazówka: $δ$ – znane, $m$ – nieznane).
2. Czas świecenia żarówek jest zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(m,55)$. Z partii żarówek pobrano 16-elementową niezależną próbę losową i otrzymano $\overbar{x}=2750$ godz. Zbuduj przedział ufności dla średniego czasu świecenia żarówek zakładający poziom ufności równy 0,95. (wskazówka: $δ$ – znane, $m$ – nieznane).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Poziom istotności:** $α$ | **0,01** | **0,02** | **0,03** | **0,04** | **0,05** | **0,06** | **0,07** | **0,08** | **0,1** |
| **Wartość krytyczna:** $z\_{α}$ | **2,58** | **2,33** | **2,17** | **2,05** | **1,96** | **1,88** | **1,81** | **1,75** | **1,64** |

1. Na zawodach pływackich zbadano czas pokonania przez sportowców dystansu 100m. Dokonano 30 niezależnych pomiarów i otrzymano z nich średnią wynoszącą 12 sekund oraz odchylenie standardowe równe 2 sekundy. Przyjmując współczynnik ufności 0,95 oszacuj metodą przedziałową czas potrzebny na pokonanie wyznaczonego dystansu. Ustal względny stopień precyzji szacunku nieznanego parametru. (wskazówka: $δ, m$ –nieznane, mała próba $n\leq 30$.).
2. W badaniach rozwoju czytelnictwa wśród młodzieży szkolnej dla losowej próby 14 uczniów klas I – III pewnej szkoły zebrano informacje dotyczące liczby przeczytanych książek w roku szkolnym. Otrzymano następujące informacje*:* 12, 13, 18, 25, 32, 19, 22, 35, 23, 30, 27, 17, 21, 28. Zakładając, że rozkład przeczytanej liczby książek w całej populacji uczniów jest zbliżony do normalnego - przy poziomie ufności 0,96 - oszacować metodą przedziałową średnią liczbę przeczytanych książek dla tej populacji. (wskazówka: $δ, m$ –nieznane, mała próba).
3. Wylosowano do badań 29 dzieci z przedszkola PSZÓŁKA i zbadano ilość konsumowanych cukierków na miesiąc. Otrzymano następujące informacje: dzieci najczęściej konsumowały 12 cukierków na miesiąc, 50% przedszkolaków konsumuje co najwyżej 10 cukierków na miesiąc. Wiedząc, że zróżnicowanie wynosi 0,2 zbuduj przedział ufności dla średniej liczby konsumowanych cukierków przez dzieci w przedszkolu PSZÓŁKA (poziomie ufności ). Określ względny błąd precyzji szacunku nieznanego parametru m. (wskazówka: $δ,m$ –nieznane, mała próba).

|  |
| --- |
| $\overbar{x}-D=3\left(\overbar{x}-Me\right)$; $AS=\frac{\overbar{x}-D}{S(x)}$ ; $ V\left(x\right)=\frac{S(x)}{\overbar{x}}$ |

1. W eksperymencie przeprowadzonym w pierwszych klasach szkół podstawowych zbadano czas reakcji nauczyciela na niegrzeczne zachowanie ucznia podczas lekcji. Dokonano 576 niezależnych prób i otrzymano na tej podstawie średni czas reakcji nauczyciela wynoszący 60 sekund oraz odchylenie standardowe 12 sekund. Przyjmując współczynnik ufności 0,94, oszacować metodą przedziałową średni czas reakcji nauczyciela na niestosowne zachowanie pierwszoklasisty oraz ocenić precyzję oszacowania. (wskazówka: $δ,m$ –nieznane, duża próba $n>30$).
2. W ciągu wybranych w sposób losowy 100 dni liczba wypadków przy pracy w kopalniach kształtowała się następująco:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Liczba wypadków | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Liczba dni | 35 | 44 | 9 | 6 | 4 | 2 |

Oszacować metodą przedziałową średnią dzienną liczbę wypadków przy pracy w kopalniach. Zbadaj precyzję szacunku. Przyjmij $1-α=0,99$. (wskazówka: $δ,m$ –nieznane, duża próba $n>30$).

1. W pewnym przedsiębiorstwie dane dotyczące wieku zatrudnionych pracowników były następujące:

|  |  |
| --- | --- |
| Wiek pracowników | Liczba pracowników |
| Poniżej 20 lat | 15 |
| 21-30 | 45 |
| 31-40 | 63 |
| 41-50 | 126 |
| 51-60 | 47 |
| Powyżej 60 lat | 29 |

Wiedząc, że zróżnicowanie wieku pracowników jest na poziomie 12%, wyznaczyć na poziomie ufności $1-α=0,94$, przedział ufności dla średniej liczby pracowników zatrudnionych w przedsiębiorstwie. (wskazówka: $δ,m$ –nieznane, duża próba $n>30$).

|  |
| --- |
| $$Q\_{2}=x\_{Q\_{2}}+\frac{\frac{n}{4}-cum n\_{i-1}}{n\_{Q\_{2}}}∙∆x\_{Q\_{2}}$$ |

1. W zakładzie pracy AXA zbadano staż pracowników w dwóch jego działach. Dla I działu liczącego 12 osób uzyskano, że średni staż pracy wynosi 10 lat, przy współczynniku zmienności 1,3%. Dla działu II liczącego 17 osób uzyskano, że średni czas staż pracy 5 lat przy odchyleniu standardowym 0,3. Wyznaczyć na poziomie ufności $1-α=0,97$, przedział ufności dla średniego stażu pracy obu działów razem. (wskazówka: $δ, m$ –nieznane, mała próba $n\leq 30$, wariancja ogólna).
2. Okresowe badanie lekarskie przeprowadzone wśród dziennikarzy trzech regionalnych gazet (GW, WZ, AG) dotyczyło ilości wypalonych przez nich dziennie papierosów. Dla dziennikarzy gazety GW dane przedstawia poniższa tabela:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ilość punktów | 0-5 | 5-10 | 10-15 | 15-18 | 18-25 |
| Ilość osób | 10 | 12 | 15 | 13 | 10 |

Dziennikarze gazety WZ wypalali następujące ilości papierosów: 2, ,3, 4, 6, 7,11, 19, 13, 21, 22.

Wśród 35 dziennikarzy gazety AG, ustalono, że 50% dziennikarzy paliło co najmniej 6 papierosów dziennie. Przy czy dziennikarze najczęściej wypalali 8 papierosów dziennie.

1. Wyznaczyć na poziomie ufności 0,97 przedział ufności dla średniej liczby wypalonych dziennie papierosów przez dziennikarzy gazety GW.
2. Wyznaczyć na poziomie ufności 0,96 przedział ufności dla średniej liczby wypalonych dziennie papierosów przez dziennikarzy gazety WZ.
3. Wyznaczyć na poziomie ufności 0,98 przedział ufności dla średniej liczby wypalonych dziennie papierosów przez dziennikarzy gazety AG.
4. Wyznaczyć na poziomie ufności  przedział ufności dla średniej liczby wypalonych dziennie papierosów przez dziennikarzy wszystkich gazet łącznie.

**Estymacja przedziałowa wariancji i odchylenia standardowego**

1. Zbudować przedział ufności dla wariancji będącej miarą zróżnicowania gęstości drzew w całym lesie, jeśli w 16 wylosowanych kwadratach lasu, o powierzchni 1 ara każdy, średnia liczba drzew wynosi  oraz  Badania wcześniejsze potwierdzają, że rozkład gęstości drzew w lesie jest rozkładem normalnym Przy konstrukcji przedziału ufności przyjąć współczynnik ufności 0,90. (wskazówka: mała próba $n\leq 30$).
2. W celu oszacowania dyspersji czasu jazdy kolejką liniową na Palenicę w Szczawnicy dokonano
5 niezależnych pomiarów czasu jazy kolejką i otrzymano następujące wartości (w minutach): 8,35; 9,02; 9,5; 8,5; 9,15. Oszacować metodą przedziałową:
	1. Wariancję czasu jazdy kolejką, przyjmując poziom ufności 0,98;
	2. Odchylenie standardowe czasu jazdy kolejką, przyjmując poziom ufności 0,98.
3. Firma BUTEX dysponuje siecią 300 sklepów. W badaniach utargu ze sprzedaży tej firmy pobrano próbkę losową, złożoną z 50 sklepów. Na podstawie próby wyznaczono wariancję dziennego utargu, która wynosi . Ustalić przedział ufności dla odchylenia standardowego utargu w sklepach sieci BUTEX przy współczynniku ufności równym 0,99. Ustalić precyzję oszacowania. (wskazówka: duża próba).
4. W badaniach dostępności pacjentów do lekarzy - specjalistów na terenie miasta „K” zebrano informacje dotyczące czasu ich oczekiwania na wizytę u lekarza. Otrzymano dane ujęte w poniższej tablicy.

|  |  |
| --- | --- |
| *Czas oczekiwania w dniach* | *Liczba Pacjentów* |
| 0 – 5 | 20 |
| 5 - 15 | 30 |
| 15 - 30 | 25 |
| Razem | 75 |

Zakładając poziom ufności 0,90 oszacować metodą przedziałową:

1. Odchylenie standardowe czasu oczekiwania pacjentów na wizytę u lekarza specjalisty wraz
z precyzją oszacowania.;
2. Wariancję czasu oczekiwania pacjentów na wizytę u lekarza specjalisty.
3. W zakładzie pracy AXA zbadano staż pracowników w dwóch jego działach.

Dla I działu liczącego 35 osób uzyskano, że średni staż pracy wynosi 10 lat, przy współczynniku zmienności 1,3%.

Dla działu II liczącego 10 osób uzyskano: 5, 7, 8, 3, 1, 7, 8, 3, 5, 2.

1. Ustalić przedział ufności dla odchylenia standardowego stażu pracy pracowników działu I firmy AXA; ($1-α=0,93$);
2. Ustalić przedział ufności dla wariancji stażu pracy pracowników działu I firmy AXA; ($1-α=0,93$);
3. Ustalić przedział ufności dla odchylenia standardowego stażu pracy pracowników działu II firmy AXA; ($1-α=0,92$);
4. Ustalić przedział ufności dla wariancji stażu pracy pracowników działu II firmy AXA; ($1-α=0,92$);
5. Wyznaczyć przedział ufności dla odchylenia standardowego stażu pracy pracowników obu działów razem ($1-α=0,97$);
6. Wyznaczyć przedział ufności dla wariancji stażu pracy pracowników obu działów razem ($1-α=0,97$).
7. Wyznaczyć przedział ufności dla średniego stażu pracy pracowników działu I firmy AXA; ($1-α=0,98$);
8. Wyznaczyć przedział ufności dla średniego stażu pracy pracowników działu II firmy AXA; ($1-α=0,97$);
9. Wyznaczyć przedział ufności dla średniego stażu pracowników obu działów razem firmy AXA; ($1-α=0,93$).
10. Badanie wydolności serca sportowców dało rezultaty:

Dla sportowców grupy A liczącej 30 osób wydolność mierzona w jednostkach umownych wynosiła 32 przy współczynniku zmienności 15%.

Dla sportowców grupy B rezultaty badań przedstawia tablica:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ilość punktów | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 |
| Ilość osób | 20 | 30 | 50 | 40 | 10 |

1. Oszacować odchylenie standardowe wydolności serca dla grupy A.
2. Oszacować odchylenie standardowe wydolności serca dla grupy B.
3. Wyznaczyć na poziomie ufności 0,98 przedział ufności dla wydolności serca dla sportowców grupy B.
4. Wyznaczyć na poziomie ufności 0,95 przedział ufności dla wydolności serca dla sportowców grupy A.
5. Oszacować średnią dla obu dyscyplin łącznie przyjmując poziom ufności 0,9.
6. Oszacować wariancję dla obu dyscyplin łącznie przyjmując poziom ufności 0,99.

**Estymacja przedziałowa wskaźnika struktury**

1. Spośród studentów Krakowa wylosowano 400 osób, którym zadano pytanie, czy palą papierosy. Stwierdzono, że 160 spośród 400 indagowanych osób sporadycznie bądź stale pali papierosy. Przyjmując współczynnik ufności  zbudować przedział ufności dla nieznanej frakcji palących. Ustalić względną precyzję szacunku nieznanej frakcji p.
2. W losowo wybranej grupie studentów UE w Katowicach 19 mieszka na stałe w Katowicach, 15
w Chorzowie, 10 w Rudzie Śląskiej, 4 w Świętochłowicach, 7 w Siemianowicach. Określić metodą przedziałową odsetek studentów mieszkających w Chorzowie i Katowicach.
3. Wylosowano niezależnie do próby 600 studentów uczelni akademickich i otrzymano następującą strukturę studentów według kierunków kształcenia:

|  |  |
| --- | --- |
| Kierunek kształcenia | Liczba studentów |
| TECHNICZNY | 150 |
| ROLNICZY | 42 |
| EKONOMICZNY | 308 |
| PEDAGOGICZNY | 12 |
| MEDYCZNY | 80 |
| ARTYSTYCZNY | 8 |

Przyjmując poziom ufności 0,95, oszacuj procent studentów kształcących się na kierunku ekonomicznym.

**Estymacja przedziałowa współczynnika korelacji**

1. W pewnym badaniu socjologicznym zebrano m. in. informacje dotyczące wieku kobiet i mężczyzn wstępujących w związek małżeński. Dla wylosowanych 200 par małżeńskich stwierdzono, iż pomiędzy badanymi cechami występuje zależność mierzona współczynnikiem korelacji liniowej Pearsona równa + 0,75. Przy poziomie ufności 0,99 oszacować metodą przedziałową współczynnik korelacji dla wieku wszystkich kobiet i mężczyzn zawierających związek małżeński. (duża próba, n>120).
2. W losowo wybranej próbie 200 pracowników zakładu AXA przeprowadzono badanie dotyczące zależności pomiędzy wadliwością produkcji (Y w %) a stażem pracy (X w latach). Otrzymano:
* Średni staż pracy pracowników zakładu AXA wynosi 16 lat.
* Średnia liczba braków w produkcji wynosi 3%.
* Współczynnik zmienności stażu pracy wynosi 31,25%
* Współczynnik zmienności wadliwości produkcji wynosi 30%.
* Cov(x,y)=-3,969.

Ustalić metodą przedziałową siłę współzależności pomiędzy cechami. (duża próba, n>120).

|  |
| --- |
| $V\left(x\right)=\frac{S(x)}{\overbar{x}}100\%$; $V\left(y\right)=\frac{S(y)}{\overbar{y}}100\%$; $r\_{xy}=\frac{cov(x,y)}{S\left(x\right)∙S(y)};$ |

1. Zbadano 5 studentów. Określono siłę współzależności pomiędzy wzrostem a ilością konsumowanych posiłków białkowych. Ustalono, że współczynnik korelacji Pearsona wynosi 0,84. Zbudować przedział ufności dla współczynnika korelacji wzrostu i ilości konsumowanych posiłków białkowych w populacji studentów, jeżeli założymy poziom ufności 0,97. (wskazówka: mała próba, zmienna pomocnicza z).
2. Zbadano zależność między liczbą emitowanych reklam a wysokością obrotów dla pięciu różnych firm
i otrzymano:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Liczba emitowanych reklam | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 65 | 70 |
| Wysokość obrotów [w tys.] | 23 | 25 | 55 | 47 | 61 | 40 | 68 |

Określić przedział ufności dla współczynnika korelacji na poziomie ufności 0,9. (wskazówka: mała próba, zmienna pomocnicza z).

|  |
| --- |
| $$r\_{xy}=\frac{\sum\_{i=1}^{n}\left(x\_{i}-\overbar{x}\right)\left(y\_{i}-\overbar{y}\right)}{\sqrt{\sum\_{i=1}^{n}\left(x\_{i}-\overbar{x}\right)^{2}\sum\_{i=1}^{n}\left(y\_{i}-\overbar{y}\right)^{2}}}$$**Interpretacja:** - zależność nieistotna statystycznie, - słaba zależność,- umiarkowana zależność,- silna zależność. |

1. Zbadano zależność między liczbą emitowanych reklam (x) a wysokością obrotów (y w tys. zł) i otrzymano:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| YX | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 |
| 0-4 |  |  |  | 8 | 6 |
| 4-8 |  |  | 36 | 72 | 18 |
| 8-12 |  | 24 | 108 | 72 | 6 |
| 12-16 | 2 | 24 | 36 | 8 |  |

Określić przedział ufności dla współczynnika korelacji na poziomie ufności 0,95. (duża próba, n>120, tablica korelacyjna).

|  |
| --- |
| $$r\_{xy}=\frac{cov(x,y)}{S\left(x\right)∙S(y)}; r\_{xy}\in \left〈-1,1\right〉$$gdzie: * Dla danych indywidualnych (w postaci szeregu korelacyjnego): ,

 * Dla danych ujętych w formie tablicy korelacyjnej:

,   |

1. Dla losowo wybranych 125 pracowników przedsiębiorstwa AXA przeprowadzono badanie zależności liczby zwolnień chorobowych (Y) od stażu pracy (X). Otrzymane wyniki są następujące:

$\overbar{x}=15,6$; $S\left(x\right)=6,2$; $\overbar{y}=$1,6; $V\left(y\right)=60\%$; $a\_{1}\left(y\right)=-0,1$

Oszacować współczynnik korelacji między tymi zmiennymi dla całej populacji pracowników przedsiębiorstwa AXA (poziom ufności 0,96).

|  |
| --- |
| $$\hat{y}=a\_{1}x+a\_{0}$$gdzie:$$a\_{1}=\frac{cov\left(x,y\right)}{S^{2}\left(x\right)}=\frac{\sum\_{i=1}^{n}\left(x\_{i}-\overbar{x}\right)\left(y\_{i}-\overbar{y}\right)}{\sum\_{i=1}^{n}\left(x\_{i}-\overbar{x}\right)^{2}}=r\_{xy}\frac{S\left(y\right)}{S\left(x\right)}$$$$ a\_{0}=\overbar{y}-a\_{1}∙\overbar{x}$$ |

1. W pewnym przedsiębiorstwie zbadano zależność między zarobkami pracowników (Y) a wydajnością pracy (X). Dla losowo wybranej 400-osobowej próby oszacowano dwa równania regresji:

$\hat{x}=2+5y$; $\hat{y}=0,05x+3,4$

Przyjmując współczynnik ufności 0,95, zbudować przedział ufności dla współczynnika korelacji liniowej w populacji generalnej.

|  |
| --- |
| $$r\_{xy}=\pm \sqrt{b\_{1}∙a\_{1}}$$ |

|  |
| --- |
| $$\hat{x}=b\_{1}y+b\_{0}$$gdzie:$$b\_{1}=\frac{cov\left(x,y\right)}{S^{2}\left(y\right)}=\frac{\sum\_{i=1}^{n}\left(x\_{i}-\overbar{x}\right)\left(y\_{i}-\overbar{y}\right)}{\sum\_{i=1}^{n}\left(y\_{i}-\overbar{y}\right)^{2}}=r\_{xy}\frac{S\left(x\right)}{S\left(y\right)}$$$$ b\_{0}=\overbar{x}-b\_{1}∙\overbar{y}$$ |

**Podsumowanie wiadomości**

1. Zbadano pod względem zróżnicowania staż pracy pracowników dwóch firm AXA i BEXA. Staż pracy pracowników firmy AXA kształtuje się w latach następująco: 1, 2,2,3,4,3,4,1. Staż pracy pracowników firmy BEXA prezentuje poniższa tabela:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Staż pracy pracowników | 0-2 | 2-4 | 4-6 | 6-8 |
| Liczba pracowników | 10 | 15 | 20 | 15 |

* Ustalić metodą przedziałową średni staż pracowników dla obu firm łącznie, przyjmując poziom ufności 0,98.
* Określić przedział ufności dla wariancji pracowników na stażu w Firmie AXA
* Określić przedział ufności dla współczynnika korelacji pomiędzy liczbą pracowników na stażu w Firmie AXA a liczbą pracowników na stażu w firmie BEXA na poziomie ufności 0,9.
1. Dysponując informacjami o wydatkach studentów dwóch wydziałów UE na odbitki ksero wydawane w ciągu tygodnia podanymi w tablicy

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Wydatki w PLN | 0-4 | 4-8 | 8-12 | 12-16 | 16-20 | 20-24 |
| Wydział I | 2 | 3 | 4 | 5 | 3 | 2 |
| Wydział II | 2 | 4 | 12 | 7 | 4 | 1 |

1. Wyznaczyć przedział do którego na poziomie ufności 0,98 należy średni poziom wydatków studentów wydziału II
2. Wyznaczyć przedział do którego na poziomie ufności 0,97 należy średni poziom wydatków studentów obu wydziałów.
3. Ustalić metodą przedziałową odsetek studentów wydających na odbitki ksero co najmniej 12zł. na poziomie ufności 0,94.
4. Przyjmując współczynnik ufności 0,94 ustalić przedział ufności dla odchylenia standardowego wydatków na ksero studentów wydziału II
5. Przyjmując współczynnik ufności 0,94 ustalić przedział ufności dla odchylenia standardowego wydatków na ksero studentów obu wydziałów jednocześnie.
6. Przeprowadzone badania na grupie 170 studentów w zakresie spożycia chipsów i dochodów dostarczyły następujących informacji:
* Średnie spożycie chipsów na studenta wynosił 2,5 paczki.
* Średni dochód na osobę wynosił 539,8 zł.
* Współczynnik zmienności dochodu wynosił 14,9% a spożycia chipsów 20,1%.
* Poziom kowariancji pomiędzy spożyciem chipsów a dochodem wynosił 26,9.

Oszacować metodą przedziałową współczynnik korelacji pomiędzy poziomem spożycia chipsów a dochodem, przyjmując współczynnik ufności 0,96.

**Literatura do zajęć**

1. Maria Balcerowicz-Szkutnik, Elżbieta Sojka, Włodzimierz Szkutnik, (2016), *Wnioskowanie statystyczne
w przykładach i zadaniach*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach.
2. S. Ostasiewicz, Z. Rusnak, U. Siedlecka (2011), *Statystyka - elementy teorii i zadania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu.
3. Mieczysław Sobczyk, *Statystyka*, (2019), Wydawnictwo Naukowe PWN.
4. Kot, S., Jakubowski, J., & Sokołowski, A. (2007). *Statystyka: podręcznik dla studiów ekonomicznych*. Centrum Doradztwa i Informacji Difin.
5. Bartos, J., Dyczka, W., Królikowska, K., Krysicki, W., & Wasilewski, M. (1999). *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa.
6. Greń, J. (1982). *Statystyka matematyczna: modele i zadania*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
7. Kot, S., Jakubowski, J., & Sokołowski, A. (2007). *Statystyka: podręcznik dla studiów ekonomicznych*. Centrum Doradztwa i Informacji Difin.