

ZESTAW ZADAŃ Z MATEMATYKI

ALGEBRA MACIERZY

Zadanie 1

Przyporządkuj podane poniżej określenia do podanych macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, D = (3 \ 1 \ 4 \ 2), J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 20 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, I = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

OKREŚLENIA: wektor kolumnowy, macierz symetryczna, wektor wierszowy, macierz kwadratowa, macierz zerowa, macierz jednostkowa, macierz diagonalna, macierz trójkątna górna, macierz trójkątna dolna.

Zadanie 2

Określ wymiary podanych macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, C = (3 \ 1 \ 4 \ 2), D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 1 \\ 9 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Zadanie 3

Dane są macierze $A(2 \times 2)$, $B(2 \times 3)$, $C(3 \times 3)$, $D(4 \times 4)$ i $E(4 \times 2)$. Wyznaczyć wymiary (jeśli to możliwe) macierzy będących wynikiem następujących działań:

- | | | |
|----------------------|--------------------|----------------------|
| a) $(AB)^T E^T$ | c) $A(DE-E)^T - B$ | e) $[(BC^T)A]^T C^2$ |
| b) $[(BB^T) - A^2]E$ | d) $(D + EE^T)E$ | f) $(EAB)^2$ |

Zadanie 4

Dane są macierze:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = (1 \ 2 \ 3 \ 4), E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wyznaczyć, jeżeli to możliwe, wymiary macierzy będących wynikiem następujących działań:

- a) AE d) FD g) $((AE)^T + B)^T$ i) $(CB)A$
 b) $B^T A$ e) $(BE)^T$ h) $((EF)^T A)^T$ j) A^3
 c) DF f) $E^T B$

Zadanie 5

Wyznacz macierz $X = ((2A - 3B)^T \cdot C - 2I)^2$, jeżeli:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, I - \text{macierz jednostkowa.}$$

Zadanie 6

Wyznaczyć macierz $X = (3A - 2B)^T F + (CD)^3 + 3I$, gdzie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, D = (2 \quad -4), I - \text{Macierz jednostkowa.}$$

Zadanie 7

Wyznaczyć macierz $X = (2 \cdot (A^T - 3B) + C \cdot D)^2$, gdzie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 8

Wyznaczyć macierz $X = [((AB)C^T + DE - AF)^T \cdot G]^2$, gdzie:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 1 \\ 9 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odpowiedź:

$$AB = \begin{pmatrix} -17 \\ -10 \end{pmatrix}_{2 \times 1}; ABC^T = ()_{2 \times 3}; DE = ()_{2 \times 3}; AF = ()_{2 \times 3};$$

$$(AB)C^T + DE - AF = \begin{pmatrix} -5 & -57 & -31 \\ 13 & -44 & -3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} -1072 & -687 & -536 \\ 9690 & 625 & 4845 \\ 2884 & -581 & 1442 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 9

Wyznaczyć macierz $X = \left[\left((AB)C^T + DE - AF \right)^T \cdot G \right]^2$, gdzie:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odpowiedź: $X = \begin{pmatrix} -10 & -10 & 238 \\ 211 & 211 & 1008 \\ 1582 & 116 & 791 \end{pmatrix}$

Zadanie 10

Sprawdź, podstawiając za A, B, C odpowiednie macierze, czy podane zależności są prawdziwe:

a) $(AB)C = A(BC)$

c) $(A+B)C = AC + BC$

b) $A(B+C) = AB + AC$

Odpowiedzi:

a) Tak, b) Tak, c) Tak.

Zadanie 11

Sprawdź, czy podane zależności są prawdziwe, podstawiając za A, B, C odpowiednie macierze:

a) $A+B = B+A$

c) $A+O = A$

b) $(A+B)+C = A+(B+C)$

d) $A+(-A) = O$

Odpowiedź:

a) Tak, b) Tak, c) Tak, d) Tak.

Zadanie 12

Sprawdź, czy podane zależności są prawdziwe:

a) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

c) $\alpha A = A\alpha$

b) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

d) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

Odpowiedzi:

a) Tak, b) Tak, c) Tak, d) Tak.

Zadanie 13Wyznaczyć macierz X , dla której zachodzi następująca równość:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 21 & 24 \end{pmatrix}$

c) $4 \left(\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X \right)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}^T$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 60 \\ 18 & 27 \\ 14 & 21 \end{pmatrix}$

Odpowiedzi:

a) $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; b) $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; c) $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zadanie 14

Rozwiązać równania macierzowe:

a) $4 \cdot \left[X + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = X$ b) $3X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} + X \cdot \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ -13 & -10 \end{pmatrix}$

Zadanie 15

Rozwiązać układ równań macierzowych:

$$\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \\ 5X + 2Y = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}, \quad \begin{cases} X + Y \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \\ Y - X \cdot \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Zadanie 16Rozwiąż równania i nierówności z niewiadomą x :

a) $(1 \ 3 \ x) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & x \\ x & 1 & 3x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 35$

c) $(1 \ 3 \ x) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ x & 2 & x \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 3x \\ 4x \end{pmatrix} < 0$

b) $(11x \ 3x \ x) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & x \\ x & 1 & 3x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \leq 0$

d) $[x \ 2 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = [0]$

Odpowiedzi:

a) $x = -1$; b) $x = 0$; c) x może być każdą liczbą z przedziału $\left(0, -\frac{10}{13}\right)$.