ZESTAW ZADAŃ Z MATEMATYKI NR. A3

MACIERZ ODWROTNA

Zad. 1 Czy istnieje macierz odwrotna do podanych macierzy?

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 0\\1 & 3 & 2 & 3\\1 & 3 & 1 & 2\\1 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 3 & 0 & 0\\0 & 0 & 11 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 2\\0 & 4 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\3 & 5 & 9 & 1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\3 & 1 & 0 & 0\\4 & 7 & 9 & 0\\5 & 6 & 9 & 1\end{pmatrix},$$

$$F=\begin{pmatrix}2 & 3 & 8 & 2\\0 & 4 & 3 & 4\\0 & 0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 2\\0 & 1 & 3 & 1\\2 & 1 & 0 & 3\\0 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 2\\0 & 1 & 3 & 1\\1 & 1 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Zad. 2 Dla jakiej wartości parametru a istnieje macierz odwrotna do podanych macierzy?:

$$A=\begin{pmatrix}3a & 3\\4 & -4a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}(1-a)^3 & 1-a\\1+a & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3a+2 & 4\\5-a & 3a+2\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}a-2 & 0 & 0\\2 & a-2 & 0\\0 & 1 & a-2\end{pmatrix},\ E=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3a\\3 & a & 2\\4 & 1 & a\end{vmatrix},\ F=\begin{pmatrix}2-a & 1 & 1\\1+a & 2-a & 1\\1 & 1+a & 1\end{pmatrix}$$

Zad. 3 Wyznacz macierze odwrotne do podanych macierzy metodą dopełnień algebraicznych (metoda wyznacznikowa):

$$A=\begin{pmatrix}4 & 7\\3 & 9\end{pmatrix},\ B=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\3 & 2 & 1\\4 & 1 & 6\end{vmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 2 & 3\\0 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

Odpowiedź: $A^{-1}=\begin{pmatrix}0,6 & -0,47\\-0,2 & 0,27\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{vmatrix}-5,5 & 2 & 1,5\\7 & -2 & -2\\2,5 & -1 & -0,5\end{vmatrix}$.

Zad. 4 Wyznacz macierze odwrotne do podanych macierzy, korzystając z własności: $A\cdot A^{-1}=I$ gdzie I jest macierzą jednostkową:

$$A=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\0 & 4 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\3 & 1 & 0\\0 & 3 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0 & 1\\0 & 4 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\2 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Odpowiedź: $B^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & -0{,}5\end{pmatrix}$, $C^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}3 & -0{,}1\\ -0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}3\\ 0{,}45 & -0{,}3 & 0{,}1\end{pmatrix}$, $D^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0 & 0 & -0{,}1\\ 0 & 0{,}25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0\\ -0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}4\end{pmatrix}$

Zad. 5 Wyznacz macierze odwrotne do podanych macierzy metodą metodą operacji elementarnych:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 2 & 9\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0 & 9\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 36 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}21 & 9 & 6 & 0\\ 9 & 11 & 2 & 3\\ 6 & 2 & 7 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 21\end{pmatrix}\ D=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 4 & 4 & 0\\ 0 & 4 & 2 & 0\\ 9 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}21 & 9 & 6 & 0\\ 9 & 11 & 2 & 3\\ 6 & 2 & 7 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 21\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 6\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix},$$

Bezwyznacznikowa metoda znajdowania macierzy odwrotnej polega na wykonywaniu tych samych operacji elementarnych na **wierszach** macierzy wyjściowej oraz macierzy jednostkowej. Celem tych operacji jest sprowadzenie macierzy wyjściowej do macierzy jednostkowej. Macierz jednostkowa przechodzi wtedy na macierz odwrotną do wyjściowej.

$$[\mathrm{A}|\mathrm{I}]\ \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}}\ [\mathrm{I}|\mathrm{A}^{-1}]\,.$$

Odpowiedzi: $A^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}45 & -0{,}4\\ -0{,}1 & 0{,}2\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}17 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0{,}33\end{pmatrix}$,

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}-0{,}01 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}03\\ 0{,}00 & 0{,}25 & 0{,}00 & 0{,}00\\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}50 & 0{,}00\\ 0{,}12 & 0{,}00 & 0{,}00 & -0{,}02\end{pmatrix},\ D^{-1}=\begin{pmatrix}-0{,}08 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}17\\ 0{,}00 & -0{,}25 & 0{,}50 & 0{,}00\\ 0{,}00 & 0{,}50 & -0{,}50 & 0{,}00\\ 0{,}25 & 0{,}00 & 0{,}00 & -0{,}17\end{pmatrix},$$

$$E^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}5 & -0{,}75\\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5\end{pmatrix},\ F^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}10 & -0{,}07 & -0{,}07 & 0{,}02\\ -0{,}07 & 0{,}15 & 0{,}03 & -0{,}02\\ -0{,}07 & 0{,}03 & 0{,}20 & -0{,}02\\ 0{,}02 & -0{,}02 & -0{,}02 & 0{,}05\end{pmatrix}.$$

Zad. 6 Wyznacz macierz odwrotną do macierzy $A=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 3 & 9\end{pmatrix}$ korzystając z poniższego wzoru:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

Zad. 7 Wyznacz macierz odwrotną do macierzy diagonalnej[1] $diag(3,4,5,6,7,8)$ korzystając z własności:

Macierz odwrotna do macierzy diagonalnej powstaje poprzez odwrócenie współczynników głównej przekątnej:

$$diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^{-1}=diag\left(\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

Zad. 8 Mając daną macierz $A=\begin{pmatrix}-12 & -17\\ 13 & 19\end{pmatrix}$. Sprawdź, czy zachodzi tożsamość: $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

Zad. 9 Sprawdź, czy zachodzi tożsamość $(A\cdot B)^{-1}=A^{-1}\cdot B^{-1}$ dla $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 6 & 4 & 9\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Zad. 10 Mając daną macierz A. Sprawdź, czy zachodzi tożsamość $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 2 & 6\\ 4 & 2 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Zad. 11 Dla jakiej wartości parametru a istnieje macierz odwrotna do macierzy **:** $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ a & 1 & a & 3\\ a & 2 & 2 & 3\\ a & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$**?**

[1] **Macierz diagonalna** – macierz, której wszystkie współczynniki leżące poza główną przekątną (główną diagonalą) są zerowe. Oznacza się ją symbolem $diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, gdzie $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ - są kolejnymi współczynnikami leżącymi na głównej przekątnej.

Zad. 12 Przy pomocy operacji odwracania macierzy, wyznaczyć macierz X z podanych równań:

a) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}^T$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T$

c) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \cdot X = 5X + \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 14 & 17 \end{pmatrix}$

f) $2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + 3X \right)^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & 13 \\ 14 & -9 \end{pmatrix}$

Zad. 13 Sprawdź, czy macierz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ jest macierzą odwrotną do macierzy $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 4 & -4 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$?

Zad. 14 Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć macierz X spełniającą następującą równość: $X^{-1}(X^T I)^{-1} X^T = A$.

Zad. 15 Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$