ZESTAW ZADAŃ Z MATEMATYKI NR. A4

UKŁADY RÓWNAŃ

Zadanie 1

Przedstaw podany układ równań w postaci macierzowej i wektorowej:

a) $\begin{cases} 3x+6y-z=9 \\ 2x+y-8z=10 \\ 3x+5y+4z=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 13x-8z=0 \\ 22x+9y=0 \\ 6y+4z=0 \end{cases}$

Zadanie 2

Dla jakich wartości parametru „$a \in R$” podane układy równań są układami Cramera?:

a) $\begin{cases} 2ax+y = 7 \\ 4x+8ay = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3(a-3)x+2ay=7 \\ -(a+1)x-3y=a-2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3ax+6y-z=9a-2 \\ 2x+ya-az=a \\ 3ax+5y+4z=6a \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3ax+6y=9xa-2 \\ 2x+ya=ay-3 \\ 3ax+5y=6az-a \end{cases}$

Zadanie 3

Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} 1x+6y-z=0 \\ -2x+y-z=0 \\ x+y+6z=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+6y-z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+4z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+6y-z=0 \\ 2x+12y-2z=0 \\ x+y+4z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1+6x_2+2x_3-4x_4=0 \\ x_1-3x_4=0 \\ x_1+0{,}5x_2+x_3=0 \\ 2x_1+10x_2+4x_3+4x_4=0 \end{cases}$

Zadanie 4

Rozwiąż układy równań metodą macierzy odwrotnej ($X = A^{-1} \cdot b$):

a) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 5x-3y=8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+6y-z=1 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+4z=-1 \end{cases}$

Zadanie 5

Wyznacz rząd macierzy, korzystając z twierdzenia „Rząd macierzy jest to największy możliwy wymiar niezerowego minora danej macierzy”.

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

b) $C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$

c) $D=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 4\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$

d) $E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 5\end{pmatrix}$

e) $F=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$

f) $G=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Zadanie 6

Wyznacz rząd macierzy, korzystając z twierdzenia „Rząd macierzy jest to maksymalna liczba liniowo niezależnych wektorów tworzących kolumny danej macierzy.”

a) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 4\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 5\end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 4 & 6\\ 6 & 0 & 12 & 24 & 36\\ 2 & 0 & 4 & 8 & 12\\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4\end{pmatrix}$

e) $E=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 & 2\\ 2 & 7 & -2 & 4 & -7 & 0 & 4\\ 1 & 4 & -1 & 2 & -4 & 0 & 0\end{pmatrix}$

f) $F=\begin{pmatrix}6 & 1 & -3 & 4 & 5\\ 12 & 2 & -6 & 8 & 10\\ 2 & 3 & -5 & 12 & -7\\ 14 & 5 & 1 & 20 & 1\end{pmatrix}$

g) $G=\begin{pmatrix}6 & 1 & -3 & 4 & 5\\ 10 & 3 & -2 & 6 & 4\\ 2 & 3 & -5 & 0 & -7\\ 14 & 5 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$

Odp. 2, 3, 2, 2,

Zadanie 7

Rozwiąż układy równań stosując Twierdzenie Kroneckera-Capellego:

a) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=5\\ x_1+x_4=0\\ 4x_2-x_3+4x_4=2\end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=5\\ 4x_1+4x_2-4x_3=20\\ 4x_2-x_3=2\end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 8 \\ 8x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 5y - z = 2 \\ 4x - z = 1 \\ 4y + z = 0 \\ 3x + 6y + 2z = 9 \\ 4x + 10y = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 2 \\ 4x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 8 \\ x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 9 \\ -x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

Zadanie 8

Rozwiąż układy równań metodą eliminacji Gaussa.

a) $\begin{cases} -2x + 12y = 18 \\ 14x + 3y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 4x_2 - 4x_3 = 20 \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 8x_3 = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 6x_1 + \quad + 6x_3 = 1 \\ 12x_1 - 8x_2 + 12x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 22 \\ 2x_2 + x_3 + x_5 = 14 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 16 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

Zadanie 9

Rozwiąż układy równań. Wyznacz rozwiązanie ogólne, szczególne, bazowe.

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \\ 2x_2 + x_3 + x_5 = 14 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 11 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 9 \\ x_4 - 3x_5 = 10 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot x_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot x_3 + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot x_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -7 \\ -24 \end{pmatrix}$

e) $\begin{cases} 5x + 6y - z = 1 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ -6x + y + 4z = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_4 + x_5 = 0 \\ +x_2 + x_3 - x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$

Zadanie 10

Określ liczbę rozwiązań układu równań w zależności od parametru $a \in R$:

a) $\begin{cases} ax + 2y = 7a - 4 \\ 5x + (a+3)y = 8(a-1)^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(a+1) + y + (2+a)^3 z = 1 \\ x + y - z = (2a-3)^2 \\ 2ax + 2y + (a+1)^2 z = -a \end{cases}$

<u>Odpowiedzi:</u>

a) dla $a \in R \setminus \{-5,2\}$ układ ma jedno rozwiązanie, b) dla $a \in R \setminus \{-2\}$ układ ma jedno rozwiązanie.