

ZESTAW ZADAŃ Z MATEMATYKI

GRANICA CIĄGU

Zad. 1 Wyznacz kilka początkowych wyrazów ciągu:

$$a) a_n = \frac{n}{2n-1} \sin\left(\frac{3}{2}n\pi\right)$$

$$b) a_n = \cos\left(\frac{4}{3}\pi n\right)$$

$$c) a_n = \operatorname{tg}\left(\frac{2}{3}\pi n\right)$$

Zad. 2 Wyznacz granice ciągu:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} 4$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} 6n^2$$

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5}$$

$$m) \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} e$$

$$f) \lim_{n \rightarrow -\infty} (-2n^5)$$

$$j) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sqrt[3]{33}}$$

$$n) \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{3^n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} n^4$$

$$g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n}$$

$$k) \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n$$

$$o) \lim_{n \rightarrow -\infty} e^n$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} n^3$$

$$h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$l) \lim_{n \rightarrow -\infty} 4^n$$

$$p) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sqrt{n}}$$

Zad. 3 Wyznacz granice ciągu:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n+6} - 7n\right)$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{2-n} + 4\right)$$

$$h) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{\ln n}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+3} + 2\right)$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{7}{8}\right)^{2-n} + 8\right)$$

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} 5^{\ln n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow -\infty} (7^{2-n} - \sqrt[3]{n})$$

$$g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{123} + \sqrt[n]{12}}{5 + 3\sqrt[n]{1023}}$$

$$j) \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)^{-3}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(5^{2n} + \frac{7}{\sqrt[3]{n}} + 4\right)$$

$$k) \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n)^3$$

$$l) \lim_{n \rightarrow \infty} \log(\log n)$$

Zad. 4 Wyznacz granice ciągu:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^4 + 2n^2 + 3)$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^4 - 2n^2 - 3)$$

$$b) \lim_{n \rightarrow -\infty} (n^3 - 3n + 2)$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6n^3 - 8n^2 + 7}$$

Zad. 5 Wyznacz granice ciągu:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^3 - 6n}{4n^3 - 10n + 5}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^3 + 5n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 5n - 2}{10n^4 + 5n^3 - n}$$

d)
$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{-4n^3 + 5n - 2}{10n + 5}$$

e)
$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{-4n^4 + 5n - 2}{10n + 5}$$

f)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 4}{\sqrt[3]{n}}$$

g)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2 - \sqrt[3]{n}}$$

h)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} + 2}{\sqrt{n} + 1}$$

i)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt[3]{27n^3 - 4n}}$$

j)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - 3n}{4\sqrt[3]{n^2} - 5}$$

k)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n} - 3n\sqrt[3]{n^4}}{4 + \sqrt[3]{n^2}}$$

l)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n} - 3\sqrt[3]{n^2}}{4 + 6\sqrt[3]{n^2}}$$

m)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - 1}{\sqrt{n^2 + 25} - 5}$$

n)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16n^4 + 2n + 4}}{3n^2}$$

Zad. 6 Wyznacz granice ciągu:

a)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-n)(6n-2)}{4n^2 - 10}$$

b)
$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{7n^3 - 2(3+2n)^3}{4n + (2n+1)^2}$$

c)
$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{3n(4+3n)^3}{-2n(2-3n)^2}$$

d)
$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{(2-3n)^2(6n-2)}{4(2-2n)^3 + (3-10n)^2}$$

e)
$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{(3-2n)(3+2n)}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

f)
$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{-2n(\sqrt{2}-n)(\sqrt{2}+n)}{4(\sqrt{3}-n\sqrt{2})(\sqrt{3}+n\sqrt{2})}$$

g)
$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{-2n(2-\sqrt[3]{n})(2+\sqrt[3]{n})}{4(\sqrt{5}-\sqrt[3]{n^2})(\sqrt{5}+\sqrt[3]{n^2})}$$

h)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-3\sqrt{n})^3}{\sqrt[3]{n}(2+4\sqrt{n})^2}$$

Zad. 7 Wyznacz granice ciągu:

a)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{3n+2}$$

b)
$$\lim_{n \rightarrow -\infty} e^{4n+12}$$

c)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{3n^3 - n^4}{6 - n^3}}$$

d)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{3n(4-n)(6+3n)}{6-n^3}}$$

e)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(6+3n)}{6-n^3}}$$

f)
$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n(4-n)^2(6+3n)}{6-n^3}}$$

g)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3(n-2n)}{2-3n}\right)^3$$

h)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(2-4n)(2-n)+4}}{\sqrt{n^2-5}}$$

i)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log \frac{n^2+(2+3n)(3n-2)}{n-2}\right)$$

j)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{(3+2n)(2n-3)}{(2n-7)^2}\right)$$

k)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log(10n^2 - 5) - \log(n^2 + 15))$$

l)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log(n^2 - 5) + \log(n^2 + 5))$$

m)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log(10n^2 + 2) - 2\log n)$$

n)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3n-2}{5n-4} (\log(10n^3 - 3n) - \log(n^3 - 3)) \right]$$

Zad. 8 Wyznacz granice ciągu:

a)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-3} + \sqrt{n})$$

b)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-3} - \sqrt{n})$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{25n^2 + 2n + 5n}}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{16n^2 - 2n - 4n}}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 1} - 2n)$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n - \sqrt{9n^2 + 6n + 1})$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 - n})$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 5n} - \sqrt{n}}$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 9}{\sqrt{n+1} - 2}$

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 1} - \sqrt{n^2 + 2n})$

l) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n(\sqrt{2n^2 + 1} - \sqrt{2n^2 - 1}))$

m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n(n - \sqrt{n^2 - 1})}$

Zad. 9 Wyznacz granice ciągu:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{3n-4}}{7^{3n+1}}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+2}}{3^{n+3}}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 4^n - 7^n)$ ¹

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n + 3^n}{3^n + 7^n}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n-1} - 5}{2^{2n} - 7}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n + 3^n}{4 \cdot 9^n + 19}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^{n-5} - 7}{3^{3n} - 3}$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} 7 - \frac{2^{2n+1} + 3}{9 - 2 \cdot 4^n}$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{\sqrt{n+1}}}{5^{\sqrt{n}}}$

Zad. 10 Wyznacz granice ciągu:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{2n-3}\right)^{2n-3}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-6}{n}\right)^n$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n+3}\right)^{2n+3}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{3n}\right)^{2n^2+3}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{3n}\right)^{2n+3}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-4}{2n+3}\right)^{2n+3}$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-6}{2n-8}\right)^{3n+4}$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+6}{n-8}\right)^{3n^2+4}$

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+6}{2n^2-8}\right)^{\frac{2n^3}{n-1}}$

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-4}{3n+3}\right)^{2n+3}$

l) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+n)^{\frac{1}{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{a_n}\right)^{a_n} = e^a$$

¹Wsk. $\lim_{n \rightarrow \infty} 7^n \left(\frac{1}{7^n} + \frac{4^n}{7^n} - 1\right)$

Zad. 11 Wyznacz granice ciągu:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3n-2}{n-4} (\ln n - \ln(n-3)) \right]$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n-2)(\ln n - \ln(2n-3))]$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n-2)(\ln n - \ln(n-3))]$
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 \log_3 2n - \log_3 \frac{n+1}{2} - \log_3 (n^2 + 2) \right]$
 e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{2n+3}{2n-4}}{\frac{1}{3n^2-2}}$
 f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(2n-3) \left(\ln \left(\frac{1}{n} + 4 \right) - \ln 4 \right) \right]$

Odp. a) 0, b) ∞ , c)

Zad. 12 Wyznacz granice ciągu:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+3} \right)^2$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{1-2+3-4+\dots+(2n-1)-2n}$
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! + (n+2)!}{(n+3)! - (n+2)!}$
 e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n-1}{3}}$
 f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{81} \right)^{\log_3(n-2)}}{\left(\frac{1}{25} \right)^{\log_5(n^2-1)}}$

Zad. 13 Które wyrazy ciągu są większe od zera?

- a) $a_n = (n^4 - n^3 + 8n - 8)(n^5 - 4n + 3)$
 b) $a_n = \frac{n^4 - 16}{n^4 + 3n^2 - 4}$
 c) $a_n = \frac{4n^5 - 4n^4 - 5n^3 + 5n}{n^3 + n^2 - 2}$

Zad. 14 Dany jest ciąg: $a_n = \frac{pn^2 - 16}{(p-1)n^2 - 4}$. Dla jakich wartości parametru a spełniony jest warunek $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p$?

Zad. 15 Dobierając odpowiednią wartość parametru a , wybierz spośród ciągów $a_n = \frac{(a^2 - 2a - 3)n + 1}{-n}$ ten który ma granicę równą 4.

Zad. 16 Które wyrazy ciągu $a_n = \frac{n-3}{n^2-2}$ są większe od 2?

Zad. 17 Wyznacz granice ciągu stosując twierdzenie o trzech ciągach:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{6}{7} \right)^n + \left(\frac{4}{5} \right)^n}$

Niech dane będą trzy ciągi liczb rzeczywistych a_n, b_n oraz c_n . Jeśli dla prawie wszystkich wyrazów tych ciągów, tzn. dla wszystkich n , większych od pewnego wskaźnika N , zachodzi

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

przy czym

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g,$$

to wtedy także

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g.$$

$$\ln 0^+ \rightarrow -\infty, \ln \infty \rightarrow \infty, \ln 1 = 0, \ln e = 1$$

$$\frac{A}{\pm \infty} = 0, \quad \frac{A}{0} = \infty,$$

$$\infty + \infty = \infty \quad \infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty^\infty = \infty$$

$$A + \infty = \infty + A = \infty \text{ dla } -\infty < A \leq +\infty$$

$$A \cdot \infty = \infty \cdot A = \infty \text{ dla } 0 < A \leq +\infty$$

Symbole nieoznaczone:

$$\left[\frac{0}{0} \right], \left[\frac{\infty}{\infty} \right], [\infty - \infty], [0 \cdot \infty], [1^\infty], [0^0], [\infty^0]$$

Jeżeli ciągi a_n, b_n są zbieżne do granic właściwych, to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n : b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) : \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C \cdot a_n) = C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((a_n)^{b_n}) = (a_n)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Podstawowe wzory:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty, \quad k > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{n^k} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{n!} = 0, \quad \text{dla } A > 0$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A} = 1$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{a_n} \right)^{a_n} = e^b, \quad a_n \rightarrow \infty$$